بسم الله الرحمن الرحیم

جزوه مختصر حسابان

سوم ریاضی و فیزیک

تهیه کننده: جعفری کیا

ناحیه ۴ مشهد

www.mclass.ir

فصل اول: محاسبات جبری و معادلات و نامعادلات

* **دنباله های حسابی(عددی) و هندسی:**

الف: دنباله های حسابی: شکل کلی این دنباله ها به صورت: $a, a+2d, a+3d, ..., a+(n-1)d, ..$ می باشد، و در این نوع دنباله ها همواره داریم:

$$* \ a_n = a+(n-1)d$$ جمله عمومی

$$* \ a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$$ واسط عددی

* مثال: اگر دنباله عددی $2,-1,-4,-7,...$ را در نظر بگیریم، در مورد جمله اول، قدر نسبت، جمله دهم و جمله سوم آن خواهیم داشت:

$$2,-1,-4,-7,... \Rightarrow a=2, d=-1-2=-3$$

$$\Rightarrow a_{10} = a+9d = 2+9(-3) = -25$$

$$\begin{cases} a_3 = -4 \\ \dfrac{a_2+a_4}{2} = \dfrac{-1+(-7)}{2} = -4 \end{cases} \Rightarrow a_3 = \frac{a_2+a_4}{2}$$

* نکته: برای محاسبه مجموع n جمله اول این نوع دنباله از روابط مقابل محاسبه می شود:

$$* \ S_n = \frac{n}{2}(2a+(n-1)d)$$

و اگر جمله آخر که آن را l می نامیم مشخص باشد فرمول بالا بصورت زیر نوشته می شود:

$$* \ S_n = \frac{n}{2}(a+l)$$

* مثال: در دنباله فوق مجموع ۱۰ جمله اول را بیابید.

$$S_{10} = \frac{10}{2}[2(2)+9(-3)] = -115$$

* مثال: در دنباله فوق مجموع چند جمله ۶۸- می شود.

$$S_n = -68 \Rightarrow \frac{n}{2}(2(2)+(n-1)(-3)) = -68 \Rightarrow 3n^2-7n-136=0 \Rightarrow \begin{cases} n=8 \\ n=\dfrac{-34}{6} \end{cases}$$

* مثال: در دنباله مقابل حداقل چند جمله را جمع کنیم که حاصل از ۳۴۰ بیشتر شود. $1,6,11,...$

$$S_n = \frac{n}{2}(2+5(n-1)) \geq 340 \Rightarrow n^2-3n-680 \geq 0 \Rightarrow n > 26$$

ب: دنباله های هندسی: شکل کلی این دنباله ها به صورت: $a, aq, aq^2, ..., aq^{n-1}, ..$ می باشد، و در این نوع دنباله ها همواره داریم:

$$* \ a_n = aq^{n-1}$$ جمله عمومی

$$* \ a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$$ واسط هندسی

* مثال: اگر دنباله عددی $7,14,28,...$ را در نظر بگیریم، در مورد جمله اول، قدر نسبت، جمله پنجم و جمله دوم آن خواهیم داشت:

$$7,14,28,... \Rightarrow a=7, q=\frac{14}{7}=2, a_5 = aq^4 = 7(2)^4 = 112$$

$$\begin{cases} a_2 = 14 \\ \sqrt{a_1a_3} = \sqrt{7\times 28} = 14 \end{cases} \Rightarrow a_2 = \sqrt{a_1a_3}$$

* نکته: برای محاسبه مجموع n جمله اول این نوع دنباله از روابط زیر محاسبه می شود:

$$* \; S_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

* مثال: در دنباله فوق مجموع ۹ جمله اول را بیابید. $S_9=\frac{7(1-2^9)}{1-2}=-7(-511)=3577$

* مثال: مجموع ۱۰ جمله از دنباله $2,\frac{2}{3},\frac{2}{9},\dots$ بیابید. $S_{10}=\frac{2(1-(\frac{1}{3})^{10})}{1-\frac{1}{3}}=3(1-(\frac{1}{3})^{10})$

* مثال: مجموع چند جمله از دنباله $-2,4,-8,\dots$ برابر ۶۸۲ می شود.

$$\frac{-2(1-(-2)^n)}{1-(-2)}=682\Rightarrow 1-(-2)^n=-1023\Rightarrow n=10$$

* تذکر: در حالتی که $|q|<1$ باشد، مجموع کل جملات از رابطه مقابل محاسبه می شود: $S=\frac{a}{1-q}$

* مثال: توپی را از زمین به سمت بالا پرتاپ می کنیم. اگر حداکثر ارتفاع توپ ۱۲ و پس از هر بار برخورد توپ با زمین $\frac{1}{3}$ مرحله قبل توپ بالا بیاید، حداکثر مسیری که توپ می پیماید را بیابید.

$$* \; 12,12(\frac{1}{3}),12(\frac{1}{3})^2,\dots\Rightarrow 24,24(\frac{1}{3}),24(\frac{1}{3})^2,\dots\xrightarrow{q=\frac{1}{3}}S=\frac{24}{1-\frac{1}{3}}=\frac{24\times 3}{2}=36$$

*** تقسیم چندجمله ای ها و بخش پذیری:**

اگر چند جمله ای را بر $B(x)$ تقسیم کنیم و $Q(x)$ خارج قسمت و $R(x)$ باقیمانده این تقسیم باشند، می توانیم بنویسیم:

$$P(x)=B(x)Q(x)+R(x)$$

* مثال: تقسیم x^3+4x-1 بر $x+6$ بصورت زیر است:

x^3+4x-1	1	0	4	-1
$x+6$	1	-6	40	-241

پس می توان نوشت: $x^3+4x-1=(x-6)(x^2-6x+40)-241$

* تذکر: در رابطه $P(x)=B(x)Q(x)+R(x)$ اگر بجای X ریشه $Q(x)$ را قرار دهیم خواهیم داشت:

$$P(a)=B(a)Q(a)+R(a)\Rightarrow P(a)=R(a)$$

* مثال: باقیمانده تقسیم x^2-6x+3 را $x-7$ بیابید.

$$x-7=0\Rightarrow x=7\Rightarrow R=P(7)=7^2-6(7)+3=10$$

* مثال: مقدار k را چنان بیابید که باقیمانده تقسیم x^2+kx-1 بر $x+2$ برابر ۶ باشد.

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow R=p(-2)=(-2)^2+k(-2)-1=6 \Rightarrow k=-\frac{3}{2}$$

* مثال: اگر باقیمانده تقسیم $P(x)$ بر $x-3$ و $x+4$ به ترتیب برابر ۱ و ۴ باشد، باقیمانده تقسیم آن را بر x^2+x-12 بیابید.

$$\begin{cases} x-3=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow p(3)=1 \\ x+4=0 \Rightarrow x=-4 \Rightarrow p(-4)=4 \\ p(x)=(x^2+x-12)Q(x)+(ax+b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(3)=a(3)+b=1 \\ P(-4)=a(-4)+b=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{3}{7} \\ b=\frac{16}{7} \end{cases}$$

* تذکر: از روابط زیر برای تجزیه چند جمله ای های مشابه می توان استفاده نمود.

$$\begin{cases} a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+...+1); \quad (n\in\mathbb{N}) \\ a^n-1=(a+1)(a^{n-1}-a^{n-2}+...-1); \quad n=2k, k\in\mathbb{N} \end{cases}$$

$$\left\{ a^n+1=(a+1)(a^{n-1}-a^{n-2}+...-a+1); \quad (n=2k-1, k\in\mathbb{N}) \right.$$

اثبات رابطه اول:

$$S=1+a+a^2+...+a^{n-1} \Rightarrow aS=a+a^2+...+a^{n-1}+a^n$$
$$aS-S=a^n-1 \Rightarrow S(a-1)=a^n-1 \Rightarrow a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+...+a+1)$$

* مثال: حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\frac{x^3+1}{x^5+1}=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)}=\frac{x^2-x+1}{x^4-x^3+x^2-x+1}$$

*** بسط دو جمله ای غیاث الدین جمشید کاشانی(خیام-پاسکال):**

برای محاسبه عباراتی که به شکل $(a+b)^n$ باشند از بسط زیر استفاده می کنیم:

$$(a+b)^n=\binom{n}{n}a^n+\binom{n}{n-1}a^{n-1}b+\binom{n}{n-2}a^{n-2}b^2+...+\binom{n}{0}b^n$$

* نکاتی مربوط به بسط فوق:

۱. درجه هر جمله برابر n می باشد. ۲. برای یافتن مجموع ضرایب کافیست بجای تمام متغیر ها عدد یک قرار دهیم.

۳. تعداد جملات بسط برابر n+1 می باشد. ۴. جمله kام برابر: $\binom{n}{n-(k-1)}a^{n-(k-1)}b^{(k-1)}$ می باشد.

۵. برای یافتن راحتر ضریب هر جمله کافیست از مثلث خیام-پاسکال استفاده کنیم و یا برای جمله اول ضریب یک، برای جمله دوم توان بسط و برای سایر جملات از حاصل ضرب توان a جمله قبل درضریب آن تقسیم بر تعداد جملات ماقبل جمله جاری استفاده شود.

۶. برای دانستن شماره جمله جاری کافیست به توان جمله دوم یک واحد بیافزاییم.

* مثال: بسط $(a+2b)^5$ را نوشته، تعداد جملات و مجموع ضرایب و جمله چهارم را بدون استفاده از بسط بنویسید.

$$(a+2b)^5=a^5+5a^4(2b)+10a^3(2b)^2+10a^2(2b)^3+5a(2b)^4+(2b)^5$$

تعداد جملات: $n+1=5+1=6$ مجموع ضرایب: $(1+2(1))^5=3^5$

جمله چهارم: $\binom{n}{n-(k-1)}a^{n-(k-1)}b^{(k-1)}=\binom{5}{2}a^2(2b)^3=10a^2(2b)^3$

* مثال: در بسط $\left(x+\frac{2}{x}\right)^8$ جمله مستقل از x را بیابید.

جمله ۵ام مستقل از x است زیرا: $x^m\left(\frac{2}{x}\right)^n, m=n, m+n=8\Rightarrow m=n=4$

* مثال: : در بسط $\left(3x-\frac{5}{\sqrt{x}}\right)^{12}$ جمله مستقل از x را بیابید.

جمله ۹ام مستقل از x است زیرا: $x^m\left(\frac{5}{\sqrt{x}}\right)^n, n=2m, m+n=12\Rightarrow m=4, n=8$

*** بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک چند جمله ای ها**

برای یافتن ب.م.م و ک.م.م اعداد و چند جمله ای ها ابتدا عبارات را تا حد امکان تجزیه کرده سپس خواهیم داشت:

حاصل ضرب عوامل مشترک با توان کمتر=ب.م.م

حاصل ضرب عوامل مشترک با توان بیشتردر حاصل ضرب عوامل غیر مشترک=ک.م.م

* مثال:ب.م.م و ک.م.م $12(x^2-25)$ و $20(x^2-6x-5)$ را بیابید.

$$\begin{cases}12(x^2-10x+25)=2^2\times3(x-5)^2\\ 20(x^2+6x-5)=2^2\times5(x-1)(x-5)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2^2(x-5) & \text{ب.م.م:}\\ 2^2(x-5)^2\times3\times5(x-1) & \text{ک.م.م:}\end{cases}$$

*** معادلات:**

در مورد سهمی ها می توان گفت:

* شکل اول: $y=a(x-x_0)^2+y_0\Rightarrow S(x_0,y_0),\begin{cases}a>0 & \text{سهمی رو به بالا}\\ a<0 & \text{سهمی رو به پایین}\end{cases}$

* شکل دوم:

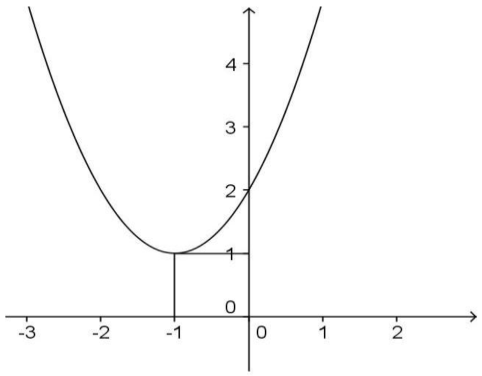
$$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}\Rightarrow S\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right),\begin{cases}a>0 & \text{سهمی رو به بالا}\\ a<0 & \text{سهمی رو به پایین}\end{cases}$$

* تذکر: برای بحث به روی سهمی ها از روی شکل باید بدانیم:

۱. نقطه $(0,c)$ محل تقاطع سهمی با محور y ها را مشخص می کند.

۲. راس سهمی نقطه $S\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ می باشد.

۳. اگر $a>0$ باشد راس سهمی نقطه مینیمم شکل و اگر $a<0$ راس سهمی نقطه ماکزیمم شلکل می باشد.



* مثال: شکل مقابل مربوط به تابع $y=ax^2+bx+c$ می باشد.

مقدار ضرایب را بیابید.

$$\begin{cases} x_{min}=-\dfrac{b}{2a}=-1\Rightarrow b=2a \\ A=(0,c)=(0,2)\Rightarrow c=2 \\ S=(-1,1)\Rightarrow a(-1)^2+b(-1)+c=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -a-2a+2=1\Rightarrow a=1,b=2$$

* مثال: کمترین مقدار تابع $f(x)=x^2-4x+2$ را بیابید.

$$a>0\Rightarrow x_{min}=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2}=2\Rightarrow y_{min}=-2$$

* تذکر: برای یافتن مجموع و حاصل ضرب ریشه های یک معادله درجه دوم(در صورت وجود) خواهیم داشت:

$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\quad,\quad P=\alpha\beta=\frac{c}{a}$$ (فرض کنید α و β ریشه های معادله اند)

* مثال: اگر α و β ریشه های معادله $x^2+5x+1=0$ باشند، حاصل عبارات مقابل را بیابید. $\dfrac{\alpha}{\beta+1}+\dfrac{\beta}{\alpha+1}$ و $\alpha^3\beta+\alpha\beta^3$

$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-5\quad,\quad P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=1$$

$$\frac{\alpha}{\beta+1}+\frac{\beta}{\alpha+1}=\frac{\alpha^2+\alpha}{(\beta+1)(\alpha+1)}+\frac{\beta^2+\beta}{(\beta+1)(\alpha+1)}=\frac{\alpha^2+\beta^2+\alpha+\beta}{(\beta+1)(\alpha+1)}$$

$$=\frac{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-2\alpha\beta+(\alpha+\beta)}{(\beta+1)(\alpha+1)}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+(\alpha+\beta)}{\alpha\beta+\beta+\alpha+1}=\frac{25-2-5}{1-5+1}=\frac{18}{-3}=-6$$

$$\alpha^3\beta+\alpha\beta^3=\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)=\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-2\alpha\beta)=$$

$$\alpha\beta\left[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\right]=1(25-2)=23$$

* تذکر: اگر مجموع و حاصل ضرب ریشه های معادله را داشته باشیم، می توانیم صورت معادله را از رابطه زیر بیابیم:

$$x^2-Sx+P=0$$

* مثال: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن $1-\sqrt{3}$ و $1+\sqrt{3}$ باشند.

$$S=2,P=-2\Rightarrow x^2-2x-2=0$$

*** معادلات شامل عبارات گویا:**

برای حل این نوع معادلات ابتدا طرفین معادله را در مخرج مشترک معادله(ک.م.م) ضرب می کنیم تا معادله از حالت کسری خارج شود، سپس جواب معادله غیر کسری بوجود آمده را می یابیم. جواب معادله بدست آمده در صورت ریشه مخرج نباشد مورد قبول است.

* مثال: معادله مقابل را حل کنید. $\frac{۱}{x+۲}+\frac{x}{x^{۲}-۴}=\frac{۱}{x}$

$$\frac{۱}{x+۲}-\frac{x}{(x-۲)(x+۲)}=\frac{۱}{x}\Rightarrow x(x-۲)(x+۲)=\text{ک.م.م}$$

$$x(x-۲)(x+۲)(\frac{۱}{x+۲})-x(x-۲)(x+۲)(\frac{x}{(x-۲)(x+۲)})=x(x-۲)(x+۲)(\frac{۱}{x})$$

$$x^{۲}-۲x-x^{۲}=x^{۲}-۴\Rightarrow x^{۲}+۲x-۴=۰\Rightarrow\begin{cases}x=\sqrt{۵}-۱\\x=-\sqrt{۵}-۱\end{cases}$$

* **معادلات شامل عبارات گنگ:**

برای حل این گونه معادلات ابتدا طرفین معادله را به توان ریشه رادیکال می رسانیم تا معادله از حالت رادیکالی خارج شود، سپس جواب معادله بدست آمده را می یابیم. جواب معادله بدست آمده را در معادله اولیه قرار می دهیم تا مورد قبول بودن آن را مورد بررسی قرار دهیم.

* مثال: نقطه ای را روی خط $y=۳x+۲$ بیابید که فاصله اش از دو نقطه $A(۲,۱)$ و $B(۲,۲)$ یکسان باشد.

$$(C=(\alpha,۳\alpha+۲),AC=BC)\Rightarrow\sqrt{(\alpha-۲)^{۲}+(۳\alpha+۲-۱)^{۲}}=\sqrt{(\alpha-۲)^{۲}+(۳\alpha+۲-۲)^{۲}}$$

* مثال: معادله مقابل را حل کنید. $\sqrt{۲x+۳}=x+۲$

$$\sqrt{۲x+۳}=x+۲\Rightarrow ۲x+۳=x^{۲}+۴x+۴\Rightarrow x^{۲}+۲x+۱=۰\Rightarrow x=-۱$$

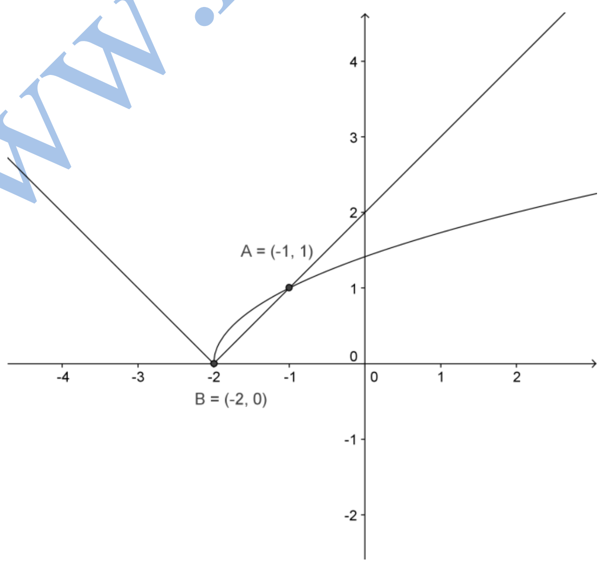
$$x=-۱\Rightarrow\sqrt{۲(-۱)+۳}=(-۱)+۲\Rightarrow ۱=۱$$

* **حل هندسی معادلات:**

برای حل معادلات بطریق هندسی ابتدا دو طرف معادله را بصورت دو تابع: $y=f(x)$ و $y=g(x)$ در نظر می گیریم. طول نقطه تلاقی دو تابع جواب معادله می باشد.

* مثال: معادله زیر را به روش هندسی حل کنید.

$$|x+۲|=\sqrt{x+۲}$$



جواب های معادله: $x=-۲,x=-۱$

*** قدر مطلق:**

تعریف: قدر مطلق به صورت مقابل تعریف می شود:

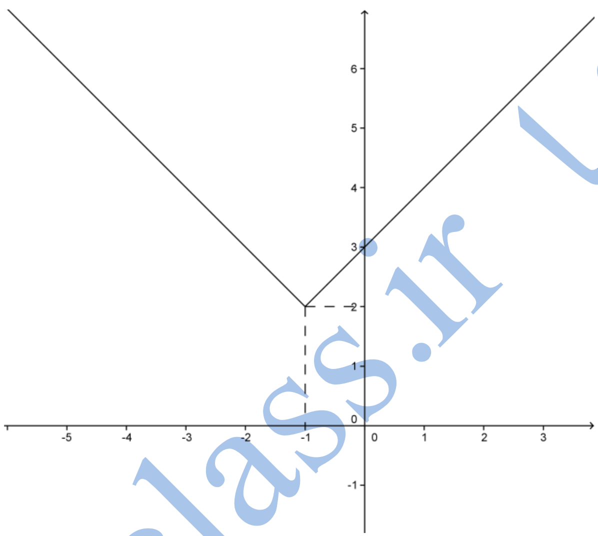
$$|x|=\begin{cases} x & x>0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

تذکر: برای رسم توابع قدر مطلق ابتدا باید از با استفاده از تعریف بالا و تعیین علامت قدر مطلق را حذف کنیم، سپس توابع بدست آمده را رسم کنیم.

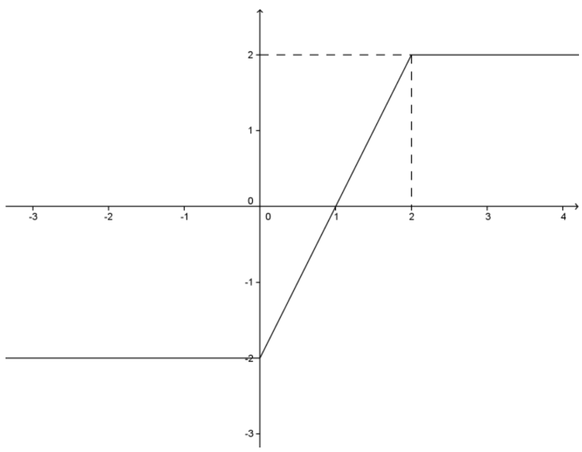
* مثال: توابع مقابل را رسم کنید.

$$y=|x|-|2-x| \quad \text{و} \quad y=|x+1|+2$$

$$y=|x+1|+2 \Rightarrow \begin{cases} x+1+2 & x\ge -1 \\ -x-1+2 & x<-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3 & x\ge -1 \\ -x+1 & x<-1 \end{cases}$$

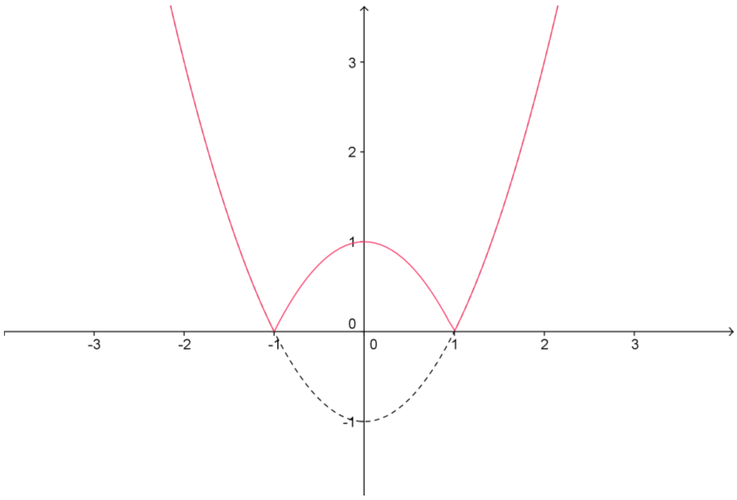


$$y=|x|-|2-x| \Rightarrow \begin{cases} -x-(2-x) & x\le 0 \\ x-(2-x) & 0<x<2 \\ x-(-2+x) & x\ge 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 & x\le 0 \\ 2x-2 & 0<x<2 \\ 2 & x\ge 2 \end{cases}$$

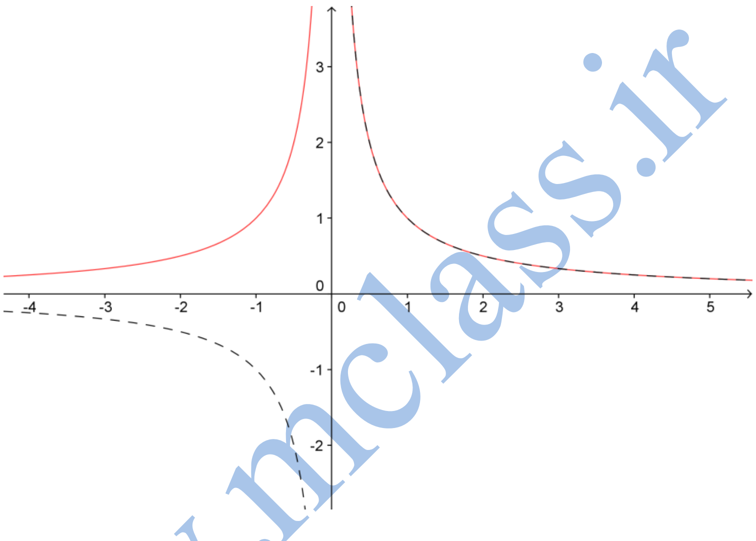


تذکر: برای رسم تابع $|f(x)|$ ابتدا تابع $f(x)$ را رسم می کنیم و سپس قسمت پایین محور y ها را نسبت به محور y ها قرینه می کنیم. و برای رسم تابع $f(|x|)$ نیز بعد از رسم تابع $f(x)$ قسمتی از شکل که در سمت چپ محور x ها قرار گرفته حذف می کنیم، مابقی شکل بعلاوه قرینه آن نسبت به محور x ها جواب مساله می باشد(زیرا: اولا: $|x|\geq 0$ و ثانیا: $f(|x|)=f(|-x|)$)

* مثال: اگر $f(x)=x^2-1$ باشد تابع $|f(x)|$ را رسم کنید.



* مثال: اگر $f(x)=\frac{1}{x}$ باشد، تابع $f(|x|)$ را رسم کنید.



تذکر: در حالت کلی داریم: $* \quad |x|=|a| \Rightarrow x=\pm a$

* مثال: معادلات مقابل را حل کنید. $|x+2|=4$ و $|x-1|=2|x|$

$$|x+2|=4 \Rightarrow \begin{cases} x+2=4 \\ x+2=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-6 \end{cases}$$

$$|x-1|=2|x| \Rightarrow \begin{cases} x-1=2x \\ x-1=-2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=\frac{1}{3} \end{cases}$$

* **نامعادلات قدر مطلقی:**

تذکر: در حالت کلی روابط زیر برقرار است:

* $|x|\geq 1 \Rightarrow x\geq 1 \ \vee \ x\leq -1$
* $|x|\leq 1 \Rightarrow -1\leq x\leq 1$
* $|a|-|b|\leq |a-b|$
* $|a+b|\leq |a|+|b|$

* مثال: نامعادلات مقابل را حل کنید. $|2x-1|<5$ و $|4x+6|\ge 3$

$$|2x-1|<5 \Rightarrow -5<2x-1<5 \Rightarrow -4<2x<6 \Rightarrow -2<x<3$$

$$|4x+6|\ge 3 \Rightarrow \begin{cases} 4x+6\ge 3 \\ 4x+6\le -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x\ge -3 \\ 4x\le -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{-3}{4} \\ x\le \dfrac{-9}{4} \end{cases} \Rightarrow \left(-\infty,\frac{-9}{4}\right]\cup\left[\frac{-3}{4},+\infty\right)$$

*** حل هندسی نامعادلات:**

برای حل نامعادلات بطریق هندسی ابتدا دو طرف نامعادله را بصورت دو تابع: $y=f(x)$ و $y=g(x)$ در نظر می گیریم.

با توجه به جهت نامعادله محدوده جواب یافت می شود.

* مثال: نامعادلات مقابل را به روش هندسی حل کنید. $\sqrt{x+1}>x$ و $|x+1|\ge\sqrt{1-x}$